Tentamen Numerieke Wiskunde 1
22 april 2010

Bij dit tentamen mag een (grafische) rekemachine worden gebruikt.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.
Gratis: $\boxed{10}$
Practica $\boxed{10}$: Voor de 5 computerpractica zijn maximaal 2 punten per practicum te verdienen.

1. We willen het nulpunt bepalen van $f(x) = e^{2x} + x$. Uit een plaatje blijkt dat het snijpunt ligt bij $x \approx -0.4$.

   (a) $\boxed{7}$ Maak een schets van de functie op [-1,0] en schets daarin ook de benadering die de Newton methode gebruikt in de eerste stap wanneer de startwaarde $x_0 = 0$ is. Stel ook de vergelijking op en geef x_1.

   (b) $\boxed{4}$ Wat is het verschil tussen de Newton methode en de Secant methode en welk voordeel heeft de Secant methode voor de gebruiker?

2. Stel $f_1(x, y) = e^x + y - 2$, $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Het stelsel $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ wordt geprobeerd op te lossen met de successieve substitutie methode $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$ dat gebruik maakt van het iteratie voorschrift

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2} f_1(x_n, y_n) + \frac{1}{4} f_2(x_n, y_n) \\
y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{4} f_2(x_n, y_n)
\end{aligned}
$$

   met een startwaarde $(x_0,\ y_0)$ dat voldoende dicht bij de oplossing $(0, 1)$ ligt.

   (a) $\boxed{5}$ Geef de Jacobiaan matrix die bij $\mathbf{g}$ hoort.

   (b) $\boxed{5}$ Toon aan dat deze methode dichtbij het nulpunt convergeert.

3. Gegeven is de functie $f(x) = e^{2x}$ en de twee steunpunten $x = 0$ en $x = 1$. De exacte waarde van $f(x)$ in het punt $x = 1/2$ is $f(1/2) = e$.

   (a) $\boxed{5}$ Geef het interpolerende polynoom op basis van de twee steunpunten $x = 0$ en $x = 1$ (lineaire interpolatie). Bepaal hiermee de geinterpoleerde waarde in het punt $x = 1/2$.

   (b) $\boxed{4}$ Geef de maximale interpolatiefout op het interval [0 1] volgens de hierop betrekking hebbende stelling. Is aan alle voorwaarden van deze stelling voldaan?

   (c) $\boxed{4}$ Bepaal de daadwerkelijk optredende interpolatiefout in $x = 1/2$ en vergelijk deze met de maximale interpolatiefout (onderdeel b). Verklaar waarom de echte interpolatiefout in $x = 1/2$ kleiner is dan de maximale.

4. Gegeven is de integraal $I = \int_0^1 12x^2\, dx$ met exacte waarde $I = 4$.

   (a) $\boxed{4}$ Het interval [0 1] wordt in eerste instantie opgedeeld in $n = 25$ deelintervallen.
   (1) Hoe groot is het (deel)oppervlak behorend bij het deelinterval [0.48 0.52] als de Rechthoekregel wordt toegepast?
   (2) Idem, wanneer de Trapeziumregel wordt toegepast i.p.v. de Rechthoekregel.

   Met een numerieke integratie methode is onderstaand resultaat verkregen. Hierin is $I(n)$ de benaderde waarde van de integraal op een rooster met n deelintervallen.

n	$I(n)$
4	3.937500000000
8	3.984375000000
16	3.996093750000
32	3.999023437500
64	3.999755859375
128	3.999938964844

(b) $\boxed{4}$ Waarom mag bij de gegeven integraal de convergentie orde via het convergentie-quotiënt (q-factor) worden bepaald? Bepaal het convergentie quotiënt dat hoort bij $I(64)$ en hiermee de convergentie orde.

(c) $\boxed{4}$ Bepaal via extrapolatie m.b.v. $I(32)$ en $I(64)$ een betere benadering van de integraal en vergelijk het resultaat met $I(128)$.

5. Beschouw op [0 5] de differentiaalvergelijking $y'(x) = -y^2$, $y(0) = 1$. Met een tweede orde methode is op twee rekenroosters (roosterafstanden $\delta x = 0.5$ en $\delta x = 0.25$) de numerieke oplossing bepaald. De numerieke oplossing is weergegeven in onderstaande tabel:

x_n	$\delta x = 0.5$	$\delta x = 0.25$
1.0	0.483144	0.496021
2.0	0.323610	0.330991
3.0	0.243890	0.248521
4.0	0.195838	0.198991
5.0	0.163658	0.165937

(a) $\boxed{4}$ Geef een foutschatting voor de oplossing op het fijnste rooster in het punt $x = 4.0$.

(b) $\boxed{4}$ Geef een verbeterde oplossing (extrapolatie) voor de oplossing op het fijnste rooster in het punt $x = 4.0$.

(c) $\boxed{4}$ Toepassen van de methode van Heun geeft uiteindelijk één expliciete uitdrukking voor de oplossing y_{n+1} in het roosterpunt x_{n+1}. Geef deze uitdrukking.

6. (a) $\boxed{5}$ Maak een LU-ontbinding zonder pivoteren van onderstaande matrix. Maak hierbij gebruik van de structuur van L en U, waarbij de diagonaal van L drie enen bevat.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{4}$ In sommige gevallen is het van belang om tijdens het maken van een LU-onbinding rijverwisselingen uit te voeren. Waarom is dat en wanneer wordt dat gedaan?

7. Beschouw op [0 1] voor $u(x,t)$ de diffusievergelijking $\partial u/\partial t = \kappa \partial^2 u/\partial x^2$, met $\kappa = 10^{-3}$, en beginvoorwaarden $u(x,0) = 100\sin(\pi x)$ en randvoorwaarden $u(0,t) = 0$ en $u(1,t) = \sin^2(t)$.

(a) $\boxed{5}$ Geef het stelsel differentievergelijkingen dat onstaat als voor $\partial^2 u/\partial x^2$ de standaard centrale discretisatie wordt gebruikt en voor de tijdsintegratie de expliciete Euler methode. N.B. Let in het bijzonder op de beginvoorwaarde en de randvoorwaarden.

(b) $\boxed{3}$ Wat is de maximale tijdstap die in het vorige onderdeel kan worden gebruikt voor een stabiele integratie? Neem hier $\Delta x = 1/200$.

(c) $\boxed{5}$ Stel dat in plaats van de expliciete Euler methode de impliciete Euler methode wordt gebruikt in onderdeel (a). Hoe komt het stelsel er dan uit te zien en hoe groot mag de tijdstap dan zijn voor een stabiele integratie?

Totaal $\boxed{100}$